

## Capítulo

# 7

# LA ELIPSE

### 7.1 DEFINICION

Una elipse es el conjunto de puntos sobre un plano colocados de tal manera que la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse.

#### ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

$$\overline{V_1 V_2} = \text{Eje mayor} = 2a$$

$$\overline{B_1 B_2} = \text{Eje menor} = 2b$$

$$\overline{F_1 F_2} = \text{Eje focal} = 2c$$

La recta  $\mathcal{F}$  que pasa por los focos se llama *eje focal*. Los puntos  $V_1$  y  $V_2$  se llaman *vértices* de la elipse. El punto  $C$  del eje focal, se llama *centro*. La recta  $\mathcal{F}' \perp \mathcal{F}$  se llama *eje normal*. Los puntos  $B_1$  y  $B_2$  son los extremos del eje menor.

El segmento que une dos puntos diferentes, tal como  $\overline{GG'}$ , se llama *cuerda*. La cuerda que pasa por uno de los focos, tal como  $\overline{EE'}$ , se llama *cuerda focal*. La cuerda focal perpendicular al eje focal se llama *lado recto* ( $\overline{LR}$ ). La cuerda que pasa por el centro de la elipse, tal como  $\overline{DD'}$ , se llama *diámetro*. Los segmentos  $\overline{PF_1}$  y  $\overline{PF_2}$  se llaman *radios vectores* de  $P$ .

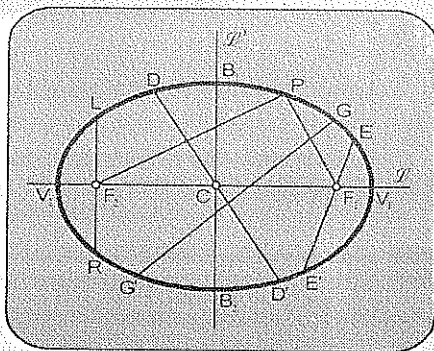


FIGURA 7.1

## 7.2 ECUACION DE LA ELIPSE DE CENTRO EL ORIGEN Y EJES DE COORDENADAS

### LOS EJES DE LA ELIPSE

**TEOREMA 7.1** La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a  $2c$  y cantidad constante igual a  $2a$  es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean  $(0, c)$  y  $(0, -c)$ , la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Para cada elipse,  $a$  es la longitud del semieje mayor,  $b$  la del semieje menor, y  $a$ ,  $b$  y  $c$  están ligados por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es  $2b^2/a$  y la excentricidad  $e$  está dada por la fórmula:  $e = c/a$ ,  $e < 1$

**Nota.** Las ecuaciones (1) y (2) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse* y son conocidas como las formas *canónicas* de la ecuación de una elipse.

## EJERCICIOS . Grupo 27

En cada uno de los ejercicios del 6 al 9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de los lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar el lugar geométrico.

**6**  $9x^2 + 4y^2 = 36$

**Solución.** Dividiendo cada término entre 36 obtenemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ . Elipse de la forma (2)}$$

Entonces:  $a = 3$  y  $b = 2$ ;  $c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Vértices:  $V(0, \pm a) \Rightarrow V_1(0, 3)$ ,  $V_2(0, -3)$

b) Focos:  $F(0, \pm c) \Rightarrow F_1(0, \sqrt{5})$ ,  $F_2(0, -\sqrt{5})$

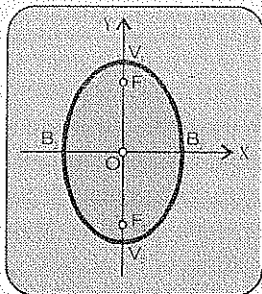


FIGURA 7.2

c) Eje mayor:  $2a = 6$  . Eje menor:  $2b = 4$

d) Excentricidad:  $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/3$  , ( $e < 1$ )

e) Longitud de cada lado recto:  $LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow LR = \frac{8}{3}$

**7**  $4x^2 + 9y^2 = 36$

**Solución.** Dividiendo cada término entre 36, se tiene:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 . \text{ Elipse de la forma (1)}$$

Luego:  $a = 3$  ,  $b = 2$  ;  $c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Vértices:  $V(\pm a, 0) \Rightarrow V_1(3, 0)$  ,  $V_2(-3, 0)$

b) Focos:  $F(\pm c, 0) \Rightarrow F_1(\sqrt{5}, 0)$  ,  $F_2(-\sqrt{5}, 0)$

c) Eje mayor:  $2a = 6$  . Eje menor:  $2b = 4$

d) Excentricidad:  $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/3$  , ( $e < 1$ )

e) Longitud de cada lado recto:  $LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow LR = \frac{8}{3}$

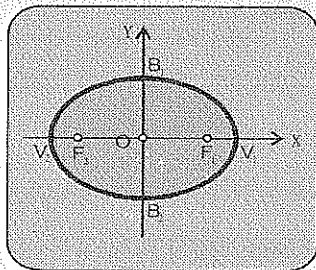


FIGURA 7.3

**8**  $16x^2 + 25y^2 = 400$

**Solución.** Dividiendo cada término entre 400 se tiene:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 . \text{ Elipse de la forma (1)}$$

Luego:  $a = 5$  ,  $b = 4$  ;  $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

a) Vértices:  $V(\pm a, 0) \Rightarrow V_1(5, 0)$  ,  $V_2(-5, 0)$

b) Focos:  $F(\pm c, 0) \Rightarrow F_1(3, 0)$  ,  $F_2(-3, 0)$

c) Eje mayor:  $2a = 10$  . Eje menor:  $2b = 8$

d) Excentricidad:  $e = c/a \Rightarrow e = 3/5$

e) Longitud de cada lado recto:  $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 32/5$

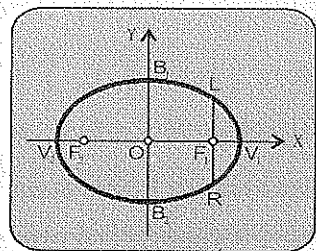


FIGURA 7.4

**10** Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos  $(4, 0)$  y  $(-4, 0)$ , y cuyos focos son los puntos  $(3, 0)$  y  $(-3, 0)$ .

**Solución.** Estando los vértices y focos sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Dado que  $a = 4$  y  $c = 3$ , de la relación  $c^2 = a^2 - b^2$ , se sigue que:

$$9 = 16 - b^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

Por tanto, en (1), se tiene:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$  ■

**11** Los vértices de una elipse con los puntos  $(0, \pm 6)$ , y sus focos son los puntos  $(0, \pm 4)$ . Hallar su ecuación.

**Solución.** Como los vértices y focos están sobre el eje Y, la ecuación de la elipse es

$$\text{de la forma: } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $a = 6$  y  $c = 4$ , de la relación  $c^2 = a^2 - b^2$ , se tiene:  $16 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es:  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$  ■

**12** Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos  $(\pm 2, 0)$ , y su excentricidad es igual a  $2/3$ .

**Solución.** Estando los focos sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $c = 2$  y  $e = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ , de donde  $a = 3$

De la relación  $c^2 = a^2 - b^2$ , se tiene:  $4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  ■

**13** Los focos de una elipse son los puntos  $(\pm 3, 0)$ , y la longitud de cada uno de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

**Solución.** Como los focos están sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la

$$\text{forma: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $c = 3$  y  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9$  (2)

$$LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 9 = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 2b^2 = 9a \quad (3)$$

La solución común de (2) y (3) es :  $a=6$  y  $b=3\sqrt{3}$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es :  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$  ■

- 14** Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto  $(0, -7)$  y pasa por  $P(\sqrt{5}, 14/3)$ .

**Solución.** Estando uno de los vértices de la elipse sobre el eje Y, su ecuación es de la

$$\text{forma:} \quad \mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Si } V_2(0, -7) \Rightarrow a=7, \text{ y si } P(\sqrt{5}, 14/3) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{5}{b^2} + \frac{196/9}{49} = 1$$

de donde obtenemos :  $b=3$

$$\text{Por tanto, en (1), se tiene,} \quad \mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 9 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}. \text{ Luego: } e = 2\sqrt{10}/7 \quad \blacksquare$$

- 15** Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos  $P(\sqrt{6}, -1)$  y  $Q(2, \sqrt{2})$ .

$$\text{Solución. Forma típica de la ecuación.} \quad \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Si } P(\sqrt{6}, -1) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (2)$$

$$Q(2, \sqrt{2}) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Resolviendo (2) y (3) obtenemos :  $a^2=8$  y  $b^2=4$

$$\text{Por tanto, en (1) se tiene:} \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \blacksquare$$

- 16** Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto  $P(\sqrt{7}/2, 3)$ , tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

**Solución.** La forma típica de la ecuación es,  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  (1)

Si  $P(\sqrt{7}/2, 3) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{7}{4a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ , y si  $a = 2b$ , resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:  $a = 4$  y  $b = 2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es,  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$  ■

**17** Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

**Demostración.** Probaremos que:  $(2b)^2 = (2a)(\overline{\text{LR}})$

En efecto, sea la elipse,  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

cuyo lado recto mide:  $\overline{\text{LR}} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 4b^2 = (2a)\overline{\text{LR}}$   
 $\Rightarrow (2b)^2 = (2a)(\overline{\text{LR}})$  ■

**18** Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinado por uno de los dos focos.

**Demostración.** En efecto, sea la elipse  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Refiriéndonos a la Figura 7.5 vemos

que:  $\overline{V_2F_1} = \overline{V_2O} + \overline{OF_1} = a + c$

$\overline{F_1V_1} = \overline{OV_1} - \overline{OF_1} = a - c$

De la relación:  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow b^2 = (a + c)(a - c)$

$\therefore (\overline{OB_1})^2 = (\overline{V_2F_1})(\overline{F_1V_1})$  ■

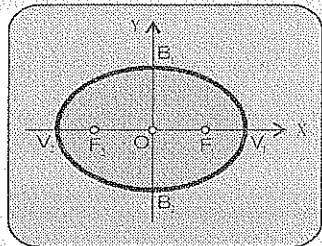


FIGURA 7.5

**19** Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

**Demostración.** En efecto, sean las elipses de excentricidad

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ y } e_2 = \frac{c_2}{a_2} \text{ . Si } e_1 = e_2 \Rightarrow \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene :  $\left(\frac{c_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{c_2}{a_2}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{(a_1)^2 - (b_1)^2}{(a_1)^2} = \frac{(a_2)^2 - (b_2)^2}{(a_2)^2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

**20** Si  $P_1(x_1, y_1)$  es un punto cualquiera de la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , demuéstrese que sus radios vectores son  $a + ex_1$  y  $a - ex_1$ . Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

**Demostración.** En efecto, si los focos de la elipse tienen por coordenadas  $F_1(c, 0)$  y

$F_2(-c, 0)$  por el teorema de la distancia

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2} \quad (1)$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} \quad (2)$$

$$\text{Si } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow (y_1)^2 = \frac{a^2b^2 - b^2(x_1)^2}{a^2} \quad (3)$$

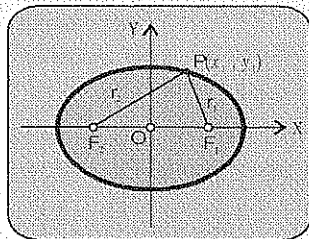


FIGURA 7.6

Sustituyendo el valor de (3) en (1) se tiene :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_1)^2 - 2cx_1 + c^2 + \frac{a^2b^2 - b^2(x_1)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2) - 2a^2cx_1 + (a^2 - b^2)(x_1)^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 \cdot a^2 - 2a^2cx_1 + c^2(x_1)^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 - 2aex_1 + e^2(x_1)^2} = \sqrt{(a - ex_1)^2} \end{aligned}$$

de donde :  $r_1 = |a - ex_1|$

Como  $e < 1 \Rightarrow a - ex_1 > 0$ ,  $\forall x_1 \in (-a, a) \Rightarrow r_1 = a - ex_1$

Análogamente, sustituyendo (3) en (2) obtenemos :  $r_2 = a + ex_1$

Sumando ambos resultados se tiene :  $r_1 + r_2 = 2a$ , cuyo significado es el siguiente : La suma de las distancias de un punto cualquiera de una elipse es igual a la longitud del eje mayor.

**21** Hallar los radios vectores del punto  $P(3, 7/4)$  que está sobre la elipse  $\mathcal{E}: 7x^2 + 16y^2 = 112$

**Solución.** Si  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow a = 4$  y  $b = \sqrt{7}$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow c = 3. \text{ Luego: } e = c/a = 3/4$$

Ahora, haciendo uso de las fórmulas obtenidas en el Ejercicio 20 se tiene:

$$r_1 = a - ex_1 = 4 - (3/4)(3) = 7/4$$

$$r_2 = a + ex_1 = 4 + (3/4)(3) = 25/4$$

**22** Los puntos extremos de un diámetro de la elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  son  $P_1$  y  $P_2$ . Si  $F$  es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores  $\overline{FP_1}$  y  $\overline{FP_2}$  es igual a la longitud del eje mayor.

**Demostración.** En efecto, refiriéndonos a la gráfica de la elipse, mostrada en la Figura 7.7, y a la fórmula hallada en el Ejercicio 20, tenemos:

$$\text{Para el punto } P_1: \overline{FP_1} = a - ex_1$$

$$\text{y para el punto } P_2: \overline{FP_2} = a - ex_2$$

$$\Rightarrow \overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a - e(x_1 + x_2) \quad (1)$$

Pero, por simetría de la elipse respecto del origen,

$$x_1 = -x_2; \text{ por lo que, en (1), se tiene: } \overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$$

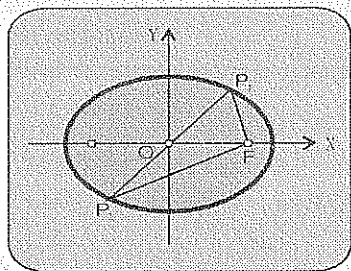


FIGURA 7.7

**23** Si  $k$  es un número positivo, demostrar que la ecuación  $\mathcal{E}: 3x^2 + 4y^2 = k$  representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene excentricidad  $1/2$ .

**Demostración.** En efecto, si  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{k/3} + \frac{y^2}{k/4} = 1 \Rightarrow a^2 = k/3$  y  $b^2 = k/4$   
 $\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = k/12$

$$\text{Si } e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{k/12}{k/3} = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

En cada uno de los ejercicios del 24 al 26 usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por traslación de coordenadas.

**24** Focos:  $F_1(3, 8)$  y  $F_2(3, 2)$ ; longitud del eje mayor = 10

**Solución.** 1. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la elipse que debe cumplir la



condición geométrica :  $|\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a$

2. Por el teorema de la distancia esta condición queda expresada analíticamente por :

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando términos se tiene :

$$5\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} = 3y + 10$$

Elevando nuevamente al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$$

Reduciendo a la forma canónica, por el método de completar cuadrados, obtenemos

$$25(x-3)^2 + 16(y-5)^2 = 400$$

Por las ecuaciones de traslación :  $x-3 = x'$  ,  $y-5 = y'$  , resulta la ecuación transformada :

$$25(x')^2 + 16(y')^2 = 400$$

**25** Vértices :  $V_1(5, -1)$  ,  $V_2(-3, -1)$  ; excentricidad =  $3/4$

**Solución.** Si  $2a = |\overline{V}_1\overline{V}_2| \Rightarrow 2a = |5 - (-3)| = 8$  ;  $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \left(\frac{3}{4}\right) 4 = 3$

Coordenadas del centro de la elipse :  $C\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) \Rightarrow C(1, -1)$

Coordenadas de los focos :  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(4, -1)$  y  $F_2(-2, -1)$

1. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la elipse que satisface la condición geométrica :

$$|\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a$$

2. La expresión analítica de esta condición es

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 8$$

3. Procedimiento como en el Ejercicio 24 obtenemos la ecuación de la elipse

$$7x^2 + 16y^2 - 14x + 32y - 89 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}: 7(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 112$$

Haciendo uso de las ecuaciones de traslación  $x-1 = x'$  ,  $y+1 = y'$  , se tiene la transformada :

$$7(x')^2 + 16(y')^2 = 112$$

**26** Vértices :  $V_1(2, 6)$  ,  $V_2(2, -2)$  ; longitud del lado recto = 2

**Solución.** Si  $2a = |\overline{V}_1\overline{V}_2| = |6 - (-2)| = 8 \Rightarrow a = 4$  ;  $LR = 2 \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 2 \Leftrightarrow b = 2$   
 $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

Coordenadas del centro de la elipse :  $C\left(\frac{2+2}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \Rightarrow C(2, 2)$

Coordenadas de los focos :  $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(2, 2 + 2\sqrt{3}), F_2(2, 2 - 2\sqrt{3})$ .

1. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la elipse que debe satisfacer la condición geométrica :

$$|\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a$$

2. Por el teorema de la distancia, la expresión analítica de esta propiedad es

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2-2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2+2\sqrt{3})^2} = 8$$

3. Efectuando las operaciones indicadas en el Ejercicio 24 resulta la ecuación de la elipse :

$$4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}: 4(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Haciendo  $x-2 = x'$ ,  $y-2 = y'$ , obtenemos finalmente la transformada

$$\mathcal{E}: 4(x')^2 + (y')^2 = 16$$

**27** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta  $\mathcal{L}: y = -8$  es siempre igual al doble de su distancia del punto  $A(0, -2)$

**Solución.** 1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica :

$$|d(P, \mathcal{L})| = 2|\overline{AP}|$$

2. La expresión analítica de esta condición es :  $|y+8| = 2\sqrt{x^2 + (y+2)^2}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando, resulta la ecuación :

$$4x^2 + 3y^2 = 48$$

El lugar geométrico obtenido es una elipse.

**23** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$

**Solución.** 1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que en cualquier posición se debe verificar

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$

2. Refiriéndonos a la Figura 7.8, la expresión analítica de esta condición es :  $x = x_1 \Leftrightarrow x_1 = x$

$$y = \frac{1}{2}(0 + y_1) \Leftrightarrow y_1 = 2y$$

3. Como  $A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 9$

$$\Rightarrow (x)^2 + (2y)^2 = 9$$

de donde obtenemos,  $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 = 9$ . El lugar geométrico es una elipse.

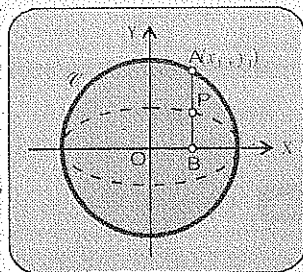


FIGURA 7.8

- 29** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 16$  en la razón 1 : 4. (Dos soluciones.)

**Solución.**

**Caso 1.** 1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que

debe cumplir la condición:  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$

2. La expresión analítica de esta condición es

$$x_1 = x, \quad \frac{y - y_1}{0 - y_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}y$$

3. Como  $A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 16$

$$\Rightarrow (x)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 16$$

De donde obtenemos:  $9x^2 + 16y^2 = 144$

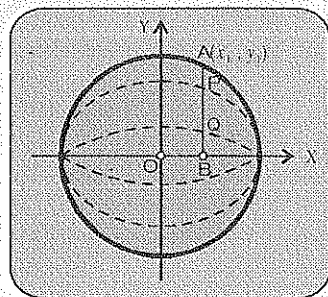


FIGURA 7.9

**Caso 2.** 1. Sea  $Q(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la con-

dicción geométrica:  $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BA}} = \frac{1}{4}$

2. Análogamente, la expresión analítica de esta condición es:

$$x_1 = x, \quad y_1 = 4y$$

3. Como  $A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 16y^2 = 16$

En ambos casos el lugar geométrico es una elipse.

## 7.3 ECUACION DE UNA ELIPSE DE CENTRO $(h, k)$ Y EJES PARALELOS A LOS COORDENADOS

**TEOREMA 7.2** La ecuación de la elipse de centro el punto  $(h, k)$  y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

## Descripción de los elementos de una elipse

(1)

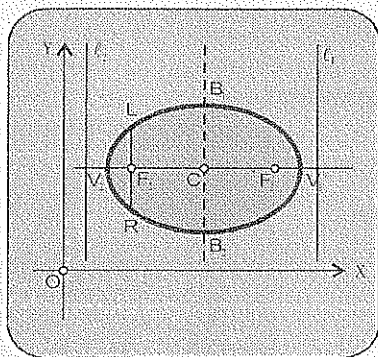


FIGURA 7.10

(2)

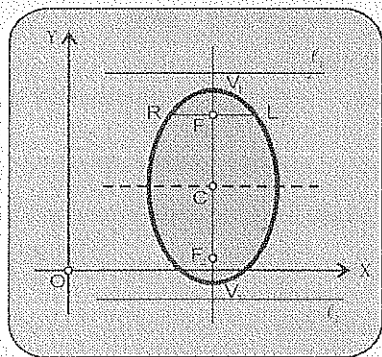


FIGURA 7.11

## FORMA (1)

- a) Vértices:  $V_1(h, +a, k)$ ,  $V_2(h - a, k)$
- b) Focos:  $F_1(h + c, k)$ ,  $F_2(h - c, k)$
- c) Extremos del eje menor  
 $B_1(h, k + b)$ ,  $B_2(h, k - b)$
- d) Lado recto:  $LR = 2b^2/a$
- e) Excentricidad:  $e = c/a$
- f) Directrices:  $x = h \pm a^2/c$

## FORMA (2)

- a) Vértices:  $V_1(h, k + a)$ ,  $V_2(h, k - a)$
- b) Focos:  $F_1(h, k + c)$ ,  $F_2(h, k - c)$
- c) Extremos del eje menor  
 $B_1(h + b, k)$ ,  $B_2(h - b, k)$
- d) Lado recto:  $LR = 2b^2/a$
- e) Excentricidad:  $e = c/a$
- f) Directrices:  $y = k \pm a^2/c$

## 7.4 ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE

**TEOREMA 7.3** Si los coeficientes A y C son el mismo signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto, o un conjunto vacío.

## EJERCICIOS . Grupo 28

- 6 Los vértices de una elipse son los puntos  $V_1(7, 1)$  y  $V_2(1, 1)$  y su excentricidad

es  $1/3$ . Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

**Solución.** Como los vértices tienen la misma ordenada, se sigue (Figura 7.10) que el eje focal de la elipse es paralelo al eje X, y su ecuación, por el Teorema 7.2,

es de la forma 
$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $2a = |\overline{V_1V_2}| = |7-1| = 6 \Rightarrow a=3$ , y si  $\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow c=1$

De la relación,  $c^2 = a^2 - b^2$ , obtenemos:  $b^2 = 8$

El centro es punto medio de  $\overline{V_1V_2}$ , entonces sus coordenadas son  $C(4, 1)$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es,  $\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$

Coordenadas de los focos:  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(5, 1)$  y  $F_2(3, 1)$

Longitudes de los ejes mayor y menor:  $2a = 6$  y  $2b = 4\sqrt{2}$

Longitud de cada lado recto:  $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 16/3$

**7** Los focos de una elipse son los puntos  $F_1(-4, -2)$  y  $F_2(-4, -6)$ , y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

**Solución.** Como los focos tienen la misma abscisa, el eje focal de la elipse es paralelo al eje Y (Figura 7.11), y su ecuación es de la forma

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $2c = |\overline{F_1F_2}| = |-6 - (-2)| = 4 \Rightarrow c=2$ , y si  $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4$  (2)

La longitud de cada lado recto es:  $LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 6 = \frac{2b^2}{a} \Leftrightarrow b^2 = 3a$  (3)

La solución común de (2) y (3) es:  $a=4$  y  $b=2\sqrt{3}$

El centro es punto medio del segmento  $\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(-4, -4)$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es,  $\mathcal{E}: \frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

y su excentricidad es:  $e = c/a = 1/2$

**8** Los vértices de una elipse son los puntos  $V_1(9, -6)$  y  $V_2(1, -6)$  y la longitud de cada lado recto es  $9/2$ . Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus

focos y su excentricidad.

**Solución.** Como los vértices tienen la misma ordenada, se sigue que el eje focal es paralelo al eje X. Por tanto, la ecuación de la elipse, es de la forma

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Si } 2a = |\overline{V_1 V_2}| = |9 - 1| = 8 \Rightarrow a = 4 \text{ y si } LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{2b^2}{4} \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}. \text{ El centro biseca al segmento } \overline{V_1 V_2} \Rightarrow C(5, -6)$$

$$\text{Luego, en (1), la ecuación de la elipse es, } \mathcal{E}: \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$$

$$\text{Coordenadas de los focos: } F(h \pm c, k) \Rightarrow F(5 \pm \sqrt{7}, -6). \text{ Excentricidad: } e = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \blacksquare$$

**9** Los focos de una elipse son los puntos  $F_1(3, 8)$ ,  $F_2(3, 2)$  y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

**Solución.** Como los focos están sobre una línea vertical, la ecuación de la elipse es

$$\text{de la forma, } \mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Si } 2c = |\overline{F_1 F_2}| = |2 - 8| = 6 \Rightarrow c = 3, 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 16 \Rightarrow a = 5. \text{ Coordenadas del centro: } C(3, 5)$$

$$\text{Luego, en (1), la ecuación de la elipse es, } \mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

$$\text{Coordenadas de los vértices: } V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(3, 10) \text{ y } V_2(3, 0)$$

$$\text{Excentricidad: } e = c/a \Rightarrow e = 3/5 \quad \blacksquare$$

**10** El centro de una elipse es el punto  $C(-2, -1)$  y uno de sus vértices es el punto  $V(3, -1)$ . Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

**Solución.** Como el centro  $C$  y el vértice  $V$  están sobre el eje focal y sus ordenadas son

$$\text{iguales, la ecuación de la elipse es de forma } \mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Además,  $a = |\overline{CV}| = |3 - (-2)| = 5$  y si  $LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 4 = \frac{2b^2}{5} \Leftrightarrow b^2 = 10$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es  $\mathcal{E}: \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{10} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 10 = 15 \Rightarrow c = \sqrt{15}$ . Excentricidad:  $e = c/a = \sqrt{15}/5$

Coordenadas de los focos:  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(-2 + \sqrt{15}, -1)$  y  $F_2(-2 - \sqrt{15}, -1)$  ■

**11** El centro de una elipse es el punto  $C(2, -4)$  y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos  $(-2, -4)$  y  $(-1, -4)$ , respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

**Solución.** Forma de la ecuación de la elipse,  $\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  (1)

Si  $c = |\overline{FC}| \Rightarrow c = |2 - (-1)| = 3$ , y si  $a = |\overline{CV}| \Rightarrow a = |2 - (-2)| = 4$   
 $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 16 - b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es,  $\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

Excentricidad:  $e = c/a \Rightarrow e = 3/4$ ;  $2b = 2\sqrt{7}$ ;  $LR = 2b^2/a = 7/2$  ■

**12** Discutir la ecuación  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  cuando  $A$  y  $C$  son ambos positivos y  $D = E = 0$

**Solución.** Si  $D = E = 0$ , la ecuación se reduce a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{-F/A} + \frac{y^2}{-F/C} = 1 \quad (1)$$

1. Si  $F > 0$ , la ecuación (1) representa un conjunto vacío.
2. Si  $F < 0$ , la ecuación (1) representa una elipse en su forma canónica, y en la que se puede considerar los siguientes casos:

a)  $-\frac{F}{A} > -\frac{F}{C}$ , la elipse tiene su eje focal coincidente con el eje X.

b)  $-\frac{F}{A} < -\frac{F}{C}$ , la elipse tiene su eje focal coincidente con el eje Y. ■

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

**13**  $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

**Solución.** Efectuamos la reducción completando cuadrados

$$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

de donde obtenemos :  $h = 3$ ,  $k = -2$ ,  $a = 2$  y  $b = 1$ ;  $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

a) Coordenadas del centro :  $C(h, k) \Rightarrow C(3, -2)$

b) Coordenadas de los vértices :  $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(5, -2)$ ,  $V_2(1, -2)$

c) Coordenadas de los focos :  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(3 + \sqrt{3}, -2)$ ,  $F_2(3 - \sqrt{3}, -2)$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor :  $2a = 4$ ,  $2b = 2$

e) Longitud de cada lado recto :  $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 1$

f) Excentricidad :  $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{3}/2$



**14**  $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

**Solución.** Completando cuadrados se tiene :

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 2y + 1) = -37 + 64 + 9 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

de donde obtenemos :  $h = -4$ ,  $k = 1$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Coordenadas del centro :  $C(h, k) \Rightarrow C(-4, 1)$

b) Coordenadas de los vértices :  $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(-1, 1)$ ,  $V_2(-7, 1)$

c) Coordenadas de los focos :  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(-4 + \sqrt{5}, 1)$ ,  $F_2(-4 - \sqrt{5}, 1)$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor :  $2a = 6$ ,  $2b = 4$

e) Longitud de cada lado recto :  $LR = 2b^2/a = 8/3$

f) Excentricidad :  $e = c/a = \sqrt{5}/3$



**15**  $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$



**Solución.** Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$(x^2 - 10x + 25) + 4(y^2 - 10y + 25) = 109 + 25 + 100 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

de donde :  $h=5$  ,  $k=5$  ,  $a=4$  ,  $b=2$  ,  $c^2=a^2-b^2=12 \Rightarrow c=2\sqrt{3}$

- a) Coordenadas del centro :  $C(h, k) \Rightarrow C(5, 5)$
- b) Coordenadas de los vértices :  $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(9, 5)$  ,  $V_2(1, 5)$
- c) Coordenadas de los focos :  $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(5+2\sqrt{3}, 5)$  ,  $F_2(5-2\sqrt{3}, 5)$
- d) Longitudes de los ejes mayor y menor :  $2a=8$  ,  $2b=4$
- e) Longitud de cada lado recto :  $LR=2b^2/a \Rightarrow LR=2$
- f) Excentricidad :  $e=c/a \Rightarrow e=\sqrt{3}/2$

**16**  $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

**Solución.** Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$9(x-0)^2 + 4(y^2 - 2y + 1) = 32 + 4 = 36 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

de donde :  $h=0$  ,  $k=1$  ,  $a=3$  ,  $b=2$  ;  $c^2=a^2-b^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

- a) Coordenadas del centro :  $C(h, k) \Rightarrow C(0, 1)$
- b) Coordenadas de los vértices :  $V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(0, 4)$  ,  $V_2(0, -2)$
- c) Coordenadas de los focos :  $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(0, 1+\sqrt{5})$  ,  $F_2(0, 1-\sqrt{5})$
- d) Longitudes de los ejes mayor y menor :  $2a=6$  ,  $2b=4$
- e) Longitud de cada lado recto :  $LR=2b^2/a = 8/3$
- f) Excentricidad :  $e=c/a \Rightarrow e=\sqrt{5}/3$

**18** Resolver el Ejercicio 16 por traslación de ejes coordenados.

El ejercicio se deja a cargo del lector.

**19** Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrase que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

**Demostración.** En efecto, sea la ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Como se puede observar, la ecuación (1) queda determinada si se conocen las cinco constantes A, B, C, D, E y F.

Sin embargo, se dividimos cada término de (1) entre el coeficiente de  $x^2$ , se tiene:

$$x^2 + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

y si designamos por:  $\frac{C}{A} = C'$ ,  $\frac{D}{A} = D'$ ,  $\frac{E}{A} = E'$  y  $\frac{F}{A} = F'$

la ecuación general se transforma en:

$$x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Ecuación que queda perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de cuatro de sus puntos. ■

**20** Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos  $P_1(1, 3)$ ,  $P_2(-1, 4)$ ,  $P_3(0, 3 - \sqrt{3}/2)$  y  $P_4(-3, 3)$ .

**Solución.** Sea la elipse  $\mathcal{E}: x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\text{Si } P_1(1, 3) \in \mathcal{E} \Rightarrow 1 + 9C + D + 3E + F = 0 \quad (1)$$

$$P_2(-1, 4) \in \mathcal{E} \Rightarrow 1 + 16C - D + 4E + F = 0 \quad (2)$$

$$P_3(0, 3 - \sqrt{3}/2) \in \mathcal{E} \Rightarrow (39/4 - 3\sqrt{3})C + (3 - \sqrt{3}/2)E + F = 0 \quad (3)$$

$$P_4(-3, 3) \in \mathcal{E} \Rightarrow 9 + 9C - 3D + 3E + F = 0 \quad (4)$$

Restando (4) - (1) se tiene:  $8 - 4D = 0 \Leftrightarrow D = 2$

$$\text{Restando (2) - (1) obtenemos: } 7C - 2D + E = 0 \Rightarrow 7C + E = 4 \quad (5)$$

$$\text{Sustituyendo } D = 2 \text{ en (1) nos queda: } 9C + 3E + F = -3 \quad (6)$$

$$\text{Restando (3) - (6) resulta: } 3C - 12\sqrt{3}C - 2\sqrt{3}E = 12 \quad (7)$$

La solución común de (5) y (7) es:  $C = 4$  y  $E = -24$

Sustituyendo los valores obtenidos en (1) se tiene:  $F = 33$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es;  $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$  ■

**21** Hallar la ecuación de la familia de elipses que tiene un centro común  $(2, 3)$ , un eje focal paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual a  $1/2$ . Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

**Solución.** La ecuación de la familia de elipses es

$$\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Si } \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a^2 = 4c^2 = 4(a^2 - b^2)$$

$$\text{de donde obtenemos: } a^2 = \frac{4}{3} b^2$$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene

$$\mathcal{E}: 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 4b^2$$

$$\text{Si } b=1 \Rightarrow \mathcal{E}_1: 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 4$$

$$b=2 \Rightarrow \mathcal{E}_2: 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 16$$

$$b=3 \Rightarrow \mathcal{E}_3: 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

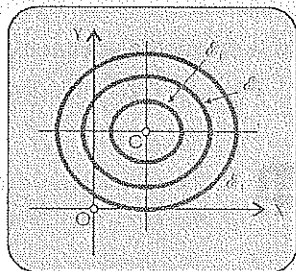


FIGURA 7.12

Las gráficas de estos tres elementos quedan representadas en la Figura 7.12

**22** La ecuación de una familia de elipses es  $\mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 + ax + by = 11$ . Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos A(2, 3) y B(5, 1)

$$\text{Solución. Si } A(2, 3) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 4(2)^2 + 9(3)^2 + a(2) + b(3) = 11 \Leftrightarrow 2a + 3b = -86 \quad (1)$$

$$B(5, 1) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow 4(5)^2 + 9(1)^2 + a(5) + b(1) = 11 \Leftrightarrow 5a + b = -98 \quad (2)$$

La solución común de las ecuaciones (1) y (2) es:  $a = -16$  y  $b = -18$

$$\therefore \mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$$

**23** La ecuación de una familia de elipses es  $\mathcal{E}: kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$ . Hallar la ecuación de aquellos elementos de la familia que tienen excentricidad 1/2.

**Solución.** Reduciendo la ecuación de la familia a su forma ordinaria se tiene:

$$k \left( x + \frac{3}{k} \right)^2 + 4(y-1)^2 = \frac{9}{k} (k+1) \Rightarrow \frac{(x+3/k)^2}{\frac{9}{k^2} (k+1)} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4k} (k+1)} = 1$$

$$\text{Si } e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{4} a^2 \quad (1)$$

$$\text{Caso 1. Supongamos que: } a^2 = \frac{9}{k^2} (k+1) \text{ y } b^2 = \frac{9}{4k} (k+1)$$

$$\text{Entonces, en (1): } \frac{9}{4k} (k+1) = \frac{27}{4k^2} (k+1), \text{ de donde: } k = 3$$

$$\text{Caso 2. Sea } a^2 = \frac{9}{4k} (k+1) \text{ y } b^2 = \frac{9}{k^2} (k+1)$$

Luego, en (1):  $\frac{9}{k^2} (k+1) = \frac{27}{4k} (k+1)$ , de donde  $k = 16/3$

Por tanto, en  $\mathcal{E}$ , las elipses de excentricidad  $1/2$  son

$$\mathcal{E}_1: 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0 \quad \vee \quad \mathcal{E}_2: 16x^2 + 12y^2 + 18x - 24y - 15 = 0 \quad \blacksquare$$

**24** Hallar las longitudes de los radios vectores del punto  $P(2, 1)$  de la elipse

$$\mathcal{E}: 9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0.$$

**Solución.** Si  $\mathcal{E}: \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow h = k = 1, a = 3, b = 1$  y  
 $c^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$

Coordenadas de los focos:  $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(1, 1 + 2\sqrt{2}), F_2(1, 1 - 2\sqrt{2})$

Por tanto:

$$r_1 = |PF_1| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1-2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$r_2 = |PF_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1+2\sqrt{2})^2} = 3 \quad \blacksquare$$

**25** El punto medio de una cuerda de la elipse  $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$  es el punto  $M(5, 2)$ . Hallar la ecuación de la cuerda.

**Solución.** Sean  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  los extremos de la cuerda.

Como  $M(5, 2)$  es punto medio de la cuerda  $\overline{P_1P_2}$ , entonces

$$x_1 + x_2 = 2(5) = 10, \quad y_1 + y_2 = 2(2) = 4$$

$$\text{Si } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x_1)^2 + 4(y_1)^2 - 6x_1 - 8y_1 - 3 = 0$$

$$P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x_2)^2 + 4(y_2)^2 - 6x_2 - 8y_2 - 3 = 0$$

Restando ambas ecuaciones se tiene:

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 6(x_1 - x_2) - 8(y_1 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow 10(x_1 - x_2) + 16(y_1 - y_2) - 6(x_1 - x_2) - 8(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow 2(y_1 - y_2) = -(x_1 - x_2)$$

de donde obtenemos la pendiente de la cuerda:  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, su ecuación es:  $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow \mathcal{L}: x + 2y - 9 = 0 \quad \blacksquare$

**26** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje  $Y$  es siempre el doble de su distancia del punto  $A(3, 2)$ .

- Solución.** 1. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica:  $|d(P, \text{Eje } Y)| = 2 |\overline{PA}|$
2. Por la definición de abscisa y el teorema de la distancia, esta condición queda expresada analíticamente por la ecuación:  $x = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$
3. De donde obtenemos:  $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52 = 0$   
El lugar geométrico es una elipse de centro  $C(4, 2)$

- 27** Desde un punto de la circunferencia  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ , se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

**Solución.** Si  $\mathcal{C}: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16 \Rightarrow C(-2, -2)$

1. Sean  $A(x_1, y_1)$  un punto de  $\mathcal{C}$  y  $B(x_1, -2)$  el pie de la perpendicular al diámetro de  $\mathcal{C}$ .

Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:  $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

2. Forma analítica de esta condición:

$$x_1 = x, \quad y = \frac{y_1 - 2}{2} \Rightarrow y_1 = 2y + 2$$

3. Si  $A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x_1 + 2)^2 + (y_1 + 2)^2 = 16$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (2y + 2 + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 4(y + 2)^2 = 16$$

El lugar geométrico es una elipse de centro  $C(-2, -2)$  cuya gráfica está representada en la Figura 7.13

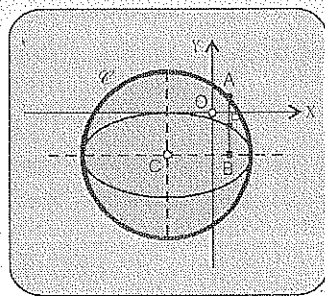


FIGURA 7.13

- 28** Desde cada punto de la circunferencia  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ , se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

**Solución.** Si  $\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow C(3, 1)$

1. Sean  $A(x_1, y_1)$  un punto de  $\mathcal{C}$  y  $B(3, y_1)$  el pie de la perpendicular de A sobre el diámetro de  $\mathcal{C}$ .

Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$

## 2. Forma analítica de esta condición

$$y_1 = y, \quad x = \frac{x_1 + 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2x - 3$$

$$3. \text{ Si } A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x_1 - 3)^2 + (y_1 - 1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 4(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

El lugar geométrico es una elipse de centro  $C(3, 2)$  cuya gráfica se muestra en la Figura 7.14. ■

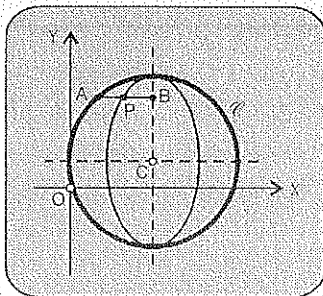


FIGURA 7.14

- 29** La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos  $(0, 0)$  y  $(6, 0)$ . Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de tal manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

**Solución.** 1. Sea  $B(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$(\operatorname{Tg} \alpha)(\operatorname{Tg} \beta) = 4$$

2. Por la definición de pendiente, esta condición se expresa analíticamente por la ecuación

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x-6}\right) = 4$$

3. De donde obtenemos:  $4x^2 + y^2 - 24x = 0$

El lugar geométrico es una elipse. ■

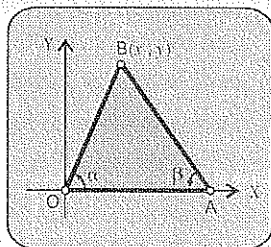


FIGURA 7.15

- 30** Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias  $\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$  y  $\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 = 1$ . (Dos soluciones.)

**Solución** 1. La circunferencia variable no contiene a  $\mathcal{C}_2$

$$\text{Si } \mathcal{C}_1: (x-0)^2 + (y-2)^2 = 16 \Leftrightarrow C_1(0, 2)$$

1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:  $\overline{C_1T} = \overline{C_1P} + \overline{PT}$

$$\text{Como } \overline{PT} = \overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1P} + (\overline{OP} - \overline{OA})$$

2. La forma analítica de esta expresión es

$$4 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$$

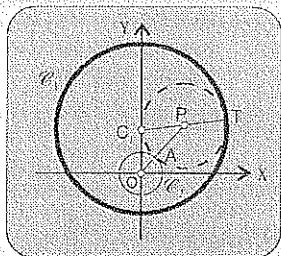


FIGURA 7.16

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

De donde obtenemos :  $100x^2 + 84y^2 - 168y - 441 = 0$

**Solución 2.** La circunferencia variable contiene a  $\mathcal{C}_2$ .

1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe

satisfacer la condición :  $\overline{C_1T} = \overline{C_1P} + \overline{PT}$

Pero  $\overline{PT} = \overline{PA} = \overline{PO} + \overline{OA} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1P} + (\overline{PO} + \overline{OA})$

2. Forma analítica :  $4 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. De donde se tiene :  $36x^2 + 20y^2 - 40y - 25 = 0$

En ambos casos la ecuación del L. G. es una elipse. ■

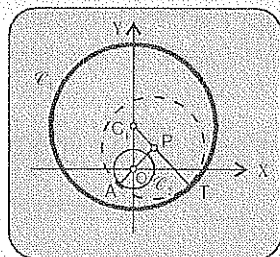


FIGURA 7.17

## 7.5 ECUACION DE LA TANGENTE A UNA ELIPSE

El procedimiento para hallar la ecuación de la tangente a una elipse es idéntico al usado para la circunferencia y la parábola. Esto es

- Tangente en un punto dado de la elipse
- Tangente con una dirección dada
- Tangente trazada desde un punto exterior a la elipse.

**TEOREMA 7.4** La tangente a la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  en cualquier punto  $P_1(x_1, y_1)$  de la curva, tiene por ecuación

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

**Demostración.** Sea  $P_2(x_1 + h, y_1 + k)$  otro punto de la elipse. Entonces, la pendiente

de la secante  $\overline{P_1P_2}$  es :  $m = \frac{y_1 + k - y_1}{x_1 + h - x_1} = \frac{k}{h}$

$$\text{Si } P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

$$P_2(x_1 + h, y_1 + k) \in \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow b^2(x_1 + h)^2 + a^2(y_1 + k)^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

Restando (2) - (1) se tiene :

$$2b^2hx_1 + 2a^2ky_1 + b^2h^2 + a^2k^2 = 0 \Rightarrow h(2b^2x_1 + b^2h) = -k(2a^2y_1 + a^2k)$$

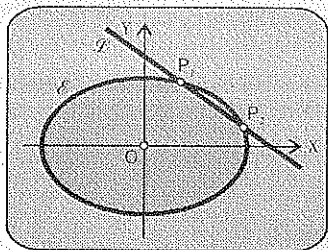


FIGURA 7.18

de donde:  $\frac{k}{h} = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k}$ , es decir,  $m = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k}$

Cuando  $P_2$  tiende a  $P_1$ , esto es, cuando  $h = k = 0$ , entonces la pendiente de la secante  $P_1P_2$  es igual a la pendiente de la tangente en  $P_1$ , por lo que

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Luego, la ecuación de la tangente en  $P_1$  es

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

**TEOREMA 7.5** Las ecuaciones de las tangentes, de pendiente  $m$ , a la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

**Demostración.** La ecuación de la familia de rectas de pendiente  $m$  es

$$y = mx + k \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(k^2 - b^2) = 0$$

Por condición de tangencia:  $(2a^2km)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)a^2(k^2 - b^2) = 0$

de donde obtenemos:  $k^2 = a^2m^2 + b^2 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

## EJERCICIOS . Grupo 29

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente, subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

**6**  $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 5$ ,  $P(1, -1)$

**Solución.** La ecuación de la tangente en  $P$  es,  $\mathcal{L}: y + 1 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene



$$2x^2 + 3(mx - m - 1)^2 = 5 \Rightarrow (2 + 3m^2)x^2 - 6m(m+1)x + 3m^2 + 6m - 2 = 0$$

Por condición de tangencia:  $36m^2(m+1)^2 - 4(2+3m^2)(3m^2+6m-2) = 0$

Efectuando y simplificando la ecuación se reduce a  $(3m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2/3$

Luego, la ecuación de la tangente es:  $y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: 2x - 3y - 5 = 0$

Ecuación de la normal:  $y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: 3x + 2y - 1 = 0$

Longitud de la tangente:  $t = \left| \frac{y_1}{m} \right| \sqrt{1+m^2} = \left| \frac{-1}{2/3} \right| \sqrt{1+(2/3)^2} = \sqrt{13}/2$

Longitud de la normal:  $m = |y_1| \sqrt{1+m^2} = |-1| \sqrt{1+4/9} = \sqrt{13}/3$

Longitud de la subtangente:  $ST = \left| \frac{y_1}{m} \right| = \left| \frac{-1}{2/3} \right| = 3/2$

Longitud de la subnormal:  $SN = |my_1| = 2/3$

**7**  $\mathcal{E}: 4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$ ,  $P(2, 1)$

**Solución.** Ecuación de la tangente,  $\mathcal{L}: y - 1 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx - 2m + 1$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$4x^2 + 2(mx - 2m + 1)^2 - 7x + (mx - 2m + 1) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2(2+m^2)x^2 + (5m-8m^2-7)x + 2(4m^2-5m-1) = 0$$

Condición de tangencia:  $(5m-8m^2-7)^2 - 16(2+m^2)(4m^2-5m-1) = 0$

de donde obtenemos la ecuación:  $(5m+9)^2 = 0 \Rightarrow m = -9/5$

Luego, en  $\mathcal{L}$  se tiene:  $y - 1 = -9/5(x - 2) \Leftrightarrow \mathcal{L}: 9x + 5y - 23 = 0$

Ecuación de la normal:  $y - 1 = 5/9(x - 2) \Leftrightarrow \mathcal{L}_1: 5x - 9y - 1 = 0$

Longitud de la tangente:  $t = \left| \frac{y_1}{m} \right| \sqrt{1+m^2} = \left| \frac{-1}{-9/5} \right| \sqrt{1+81/25} = \frac{\sqrt{106}}{9}$

Longitud de la normal:  $m = |y_1| \sqrt{1+m^2} = \sqrt{1+81/25} = \sqrt{106}/5$

Longitud de la subtangente:  $ST = |y_1/m| = 5/9$

Longitud de la subnormal:  $SN = |y_1 m| = 9/5$

**8** Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse

$$\mathcal{E}: 4x^2 + 5y^2 = 8$$

**Solución.** Las ecuaciones de las tangentes tienen la forma:  $y = 2x + b$  (1)

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$4x^2 + 5(2x + b)^2 = 8 \Leftrightarrow 24x^2 + 20bx + 5b^2 - 8 = 0$$

Por condición de tangencia:  $(20b)^2 - 4(24)(5b^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow b = \pm \frac{4}{5}\sqrt{15}$

Luego, en (1), las ecuaciones de las tangentes son:  $10x - 5y \pm 4\sqrt{15} = 0$  ■

**9** Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse  $\mathcal{E}: 3x^2 + y^2 + 4x - 2y = 3$  que son perpendiculares a la recta  $\mathcal{L}: x + y - 5 = 0$

**Solución.** La ecuación de la familia de rectas perpendiculares a  $\mathcal{L}$  es

$$y = x + b \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$3x^2 + (x + b)^2 + 4x - 2(x + b) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2(b + 1)x + b^2 - 2b - 3 = 0$$

Condición de tangencia:  $4(b + 1)^2 - 4(4)(b^2 - 2b - 3) = 0$

de donde obtenemos la ecuación:  $3b^2 - 10b + 13 = 0 \Leftrightarrow b_1 = -1 \vee b_2 = 13/3$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathcal{L}_1: x - y - 1 = 0 \vee \mathcal{L}_2: 3x - 3y + 13 = 0 \quad \blacksquare$$

**10** Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto  $P(3, -1)$  a la elipse  $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$

**Solución.** La ecuación de la familia de rectas que pasan por  $P(3, -1)$  es

$$y + 1 = m(x - 3) \Leftrightarrow y = mx - 3m - 1 \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene:

$$2x^2 + 3(mx - 3m - 1)^2 + x - (mx - 3m - 1) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + 3m^2)x^2 + (1 - 7m - 18m^2)x + 27m^2 + 21m - 1 = 0$$

Condición de tangencia:  $(1 - 7m - 18m^2)^2 - 4(2 + 3m^2)(27m^2 + 21m - 1) = 0$

de donde obtenemos:  $191m^2 + 182m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 9/191$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$x + y - 2 = 0 \vee 9x - 191y - 218 = 0 \quad \blacksquare$$

**11** Con referencia a la elipse  $\mathcal{E}: x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$ , hallar los valores de  $k$  para los cuales las rectas de la familia  $5x + 2y + k = 0$

- cortan a la elipse en dos puntos diferentes
- son tangentes a la elipse
- no cortan a la elipse

**Solución.** Si  $5x + 2y + k = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(k + 5x)$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene :

$$x^2 + \frac{3}{4}(k + 5x)^2 + 3x + 2(k + 5x) - 3 = 0 \Rightarrow 79x^2 + 2(26 + 15k)x + 3k^2 + 8k - 12 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Discriminante de la ecuación: } \Delta &= 4(26 + 15k)^2 - 4(79)(3k^2 + 8k - 12) = 0 \\ &= 16(-3k^2 + 37k + 406)\end{aligned}$$

a) Las rectas cortan a la elipse si  $\Delta > 0$ , esto es, si

$$\begin{aligned}-3k^2 + 37k + 406 &> 0 \Rightarrow 3k^2 - 37k - 406 < 0 \\ &\Leftrightarrow (3k - 58)(k + 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < k < 58/3\end{aligned}$$

b) Las rectas son tangentes a la elipse si  $\Delta = 0$ , esto es, si

$$(3k - 58)(k + 7) = 0 \Leftrightarrow k = 58/3 \vee k = -7$$

c) Las rectas no cortan a la elipse si  $\Delta < 0$ , esto es, si

$$(3k - 58)(k + 7) > 0 \Leftrightarrow k < -7 \vee k > 58/3$$

**12** Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses  $\mathcal{E}_1: 3x^2 + 4y^2 = 43$  y  $\mathcal{E}_2: 4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$  en uno de sus dos puntos de intersección.

**Solución.** Interceptando  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  obtenemos los puntos  $P_1(3, 2)$  y  $P_2(3, -2)$

Como  $\mathcal{E}_1$  es una elipse de la forma  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , por el Teorema 7.4, la pendiente de la tangente en  $P_1(3, 2)$  es

$$m_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = -\frac{(43/4)(3)}{(43/3)(2)} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Si } \mathcal{E}_2: \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(y-0)^2}{8} = 1 \Leftrightarrow h=4, \quad k=0, \quad a^2=8, \quad b^2=2$$

Para una elipse de ecuación  $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ , la pendiente de la tangente

$$\text{en el punto } P_1(x_1, y_1) \text{ es: } m = -\frac{a^2(x_1-h)}{b^2(y_1-k)}$$

$$\text{Entonces, para } \mathcal{E}_2 \text{ se tiene: } m_2 = -\frac{8(3-4)}{2(2-0)} = 2$$

$$\text{Luego, si } \operatorname{Tg}\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| \Leftrightarrow \operatorname{Tg}\theta = \left| \frac{2 + 9/8}{1 - 18/8} \right| = 2.5 \Leftrightarrow \theta = 68^\circ 12'$$

- 13** Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente  $m$  a la elipse  $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$  son  $y-k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

La demostración se deja a cargo del lector. (Sugerencia : Use las ecuaciones de traslación en el Teorema 7.5)

- 14** Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  en el punto  $P_1(x_1, y_1)$  es :  $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$

**Demostración.** En efecto, la ecuación de la normal que pasa por  $P_1(x_1, y_1)$  es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (1)$$

Por el Teorema 7.4, la pendiente de la tangente en dicho punto es,  $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Entonces, la pendiente de la normal será,  $m_n = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ . Luego, en (1) se tiene :

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$$

- 16** Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por el origen, la elipse es una circunferencia.

**Demostración.** En efecto, por el Ejercicio 14, la ecuación de la normal es

$$\mathcal{L}: a^2y_1x - b^2x_1y = (a^2 - b^2)x_1y_1$$

Si  $(0, 0) \in \mathcal{L} \Rightarrow a^2y_1(0) - b^2x_1(0) = (a^2 - b^2)x_1y_1 \Rightarrow (a^2 - b^2)x_1y_1 = 0$

Dado que  $x_1y_1 \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = b$

Es la condición para que una elipse sea una circunferencia.

- 17** Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

**Demostración.** Sea la elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Como la curva es simétrica respecto del origen, entonces, si  $P_1(x_1, y_1)$  es un extremo de un diámetro, el otro extremo será  $P_2(-x_1, -y_1)$ . Por el Teorema 7.4, las ecuaciones de las tangentes en  $P_1$  y  $P_2$  son, respectivamente :

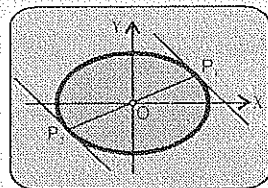


FIGURA 7.19

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2 \Rightarrow m_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

$$-b^2 x_1 x - x^2 y_1 y = a^2 b^2 \Rightarrow m_2 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

Como  $m_1 = m_2$ , las tangentes son paralelas.

- 18** Demostrar que la pendiente de la tangente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

**Demostración.** Sea la elipse  $\mathcal{E}: b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  cuya tangente en  $L(x_1, y_1)$  tiene por ecuación,  $\mathcal{L}: b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$  (1)

Si el foco es  $F(c, 0) \Rightarrow c = x_1$ , y si

$$LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{b^2}{a}$$

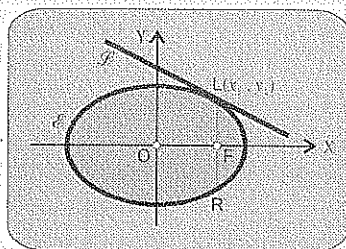


FIGURA 7.20

Luego, en (1):  $b^2 c x + a^2 \left(\frac{b^2}{a}\right) y = a^2 b^2$

de donde se tiene,  $\mathcal{L}: c x + a y = a \Rightarrow m = -\frac{c}{a} = -e$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es numéricamente igual a la excentricidad de la elipse.

- 19** Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

**Demostración.** Sea la elipse  $\mathcal{E}: b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  cuyos focos son:

$$F_1(c, 0) \text{ y } F_2(-c, 0)$$

Por el Teorema 7.5, la ecuación de la tangente, de pendiente  $m$ , es:

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Rightarrow \mathcal{L}: mx - y + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow d(F_1, \mathcal{L}) = \frac{mc + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$d(F_2, \mathcal{L}) = \frac{-mc + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

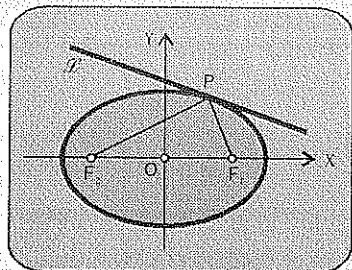


FIGURA 7.21

$$\begin{aligned}\text{Luego: } d(F_1, \mathcal{L}) \cdot d(F_2, \mathcal{L}) &= \frac{(a^2 m^2 + b^2) - m^2 c^2}{m^2 + 1} = \frac{m^2(a^2 - c^2) + b^2}{m^2 + 1} \\ &= \frac{m^2 b^2 + b^2}{m^2 + 1} = b^2\end{aligned}$$

**20** Por el punto  $P(2, 7)$  se trazan tangentes a la elipse  $\mathcal{E}: 2x^2 + y^2 + 2x - 3y = 2$ . Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

**Solución.** La ecuación de la familia de rectas que pasan por  $P(2, 7)$  es

$$y - 7 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx + 7 - 2m \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene:

$$2x^2 + (mx + 7 - 2m)^2 + 2x - 3(mx + 7 - 2m) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + m^2)x^2 + (11m - 4m^2 + 2)x + 4m^2 - 22m + 26 = 0$$

Por condición de tangencia:  $(11m - 4m^2 + 2)^2 - 4(2 + m^2)(4m^2 - 22m + 26) = 0$

de donde obtenemos:  $31m^2 - 220m + 204 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \vee m = 34/31$

Luego, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathcal{L}_1: 6x - y - 5 = 0 \vee \mathcal{L}_2: 34x - 31y + 149 = 0$$

Por tanto:  $(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{E}) = P_1(1, 1)$  y  $(\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{E}) = P_2(-13/9, 29/9)$

**21** Si desde un punto exterior  $P_1$  se trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de  $P_1$  para esa elipse. Si  $P_1(x_1, y_1)$  es el punto exterior a la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de  $P_1$  es

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

**Demostración.** Sean los puntos de tangencia

$$P_2(x_2, y_2) \text{ y } P_3(x_3, y_3)$$

Por el Teorema 7.4, la ecuación de la tangente en  $P_2$  es

$$\mathcal{L}_1: b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$$

$$P_1 \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow b^2x_2x_1 + a^2y_2y_1 = a^2b^2$$

$$\text{de donde: } x_2 = \frac{a^2b^2 - a^2y_1y_2}{b^2x_1}$$

$$\text{Como } P_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2(x_2)^2 + a^2(y_2)^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene:

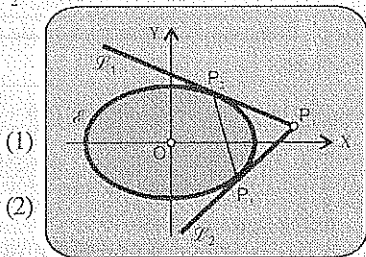


FIGURA 7.22

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \left( \frac{a^2 b^2 - a^2 y_1 y_2}{b^2 x_1} \right)^2 + a^2 (y_2)^2 = a^2 b^2 \\
 \Rightarrow [a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2] (y_2)^2 - 2a^2 b^2 y_1 y_2 + [a^2 - (x_1)^2] b^4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow y_2 &= \frac{a^2 b^2 y_1 \pm \sqrt{a^4 b^4 (y_1)^2 - [a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2] [a^2 - (x_1)^2] b^4}}{a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2} \\
 &= \frac{a^2 b^2 y_1 \pm b^2 x_1 \sqrt{a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2 - a^2 b^2}}{a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2}
 \end{aligned}$$

Para hacer menos tediosa las operaciones, hagamos :

$$k = \sqrt{a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2 - a^2 b^2} \quad y \quad r = a^2 (y_1)^2 + b^2 (x_1)^2$$

Entonces :  $y_2 = \frac{1}{r} (a^2 b^2 y_1 + b^2 x_1 k) \quad \vee \quad y_3 = \frac{1}{r} (a^2 b^2 y_1 - b^2 x_1 k)$

Restando se tiene :  $y_2 - y_3 = 2b^2 x_1 \left( \frac{k}{r} \right)$

Sustituyendo los valores de  $y_2$  e  $y_3$  en (1) obtenemos

$$x^2 = \frac{1}{r} (a^2 b^2 x_1 - a^2 y_1 k) \quad \vee \quad x_3 = \frac{1}{r} (a^2 b^2 x_1 + a^2 y_1 k)$$

Restando resulta :  $x_2 - x_3 = -2a^2 y_1 \left( \frac{k}{r} \right)$

Ecuación de la cuerda de contacto :  $y - y_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} (x - x_2)$

$$\begin{aligned}
 y - y_2 &= - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_2) \Rightarrow y = - \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) x + y_2 + \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) x_2 \\
 \Rightarrow y &= - \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) x + \frac{1}{r} (a^2 b^2 y_1 + b^2 x_1 k) + \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) (a^2 b^2 x_1 - a^2 y_1 k) \\
 &= - \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) x + \frac{a^2 b^2 (a^2 y_1 + b^2 x_1)}{a^2 y_1 r} = - \left( \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \right) x + \frac{b^2}{y_1} \\
 \therefore b^2 x_1 x + a^2 y_1 y &= a^2 b^2
 \end{aligned}$$

**22** Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto  $P(3, 1)$  para la elipse  $x^2 + 2y^2 = 2$

**Solución.** De la ecuación de la elipse se tiene :  $a^2 = 2$  y  $b^2 = 1$

Por la fórmula del Ejercicio 21, la ecuación de la cuerda de contacto es :

$$(1)(3)x + (2)(1)y = (2)(1) \Leftrightarrow \mathcal{L}: 3x + 2y - 2 = 0$$

- 23** Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente  $m$  de la elipse

$$\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = -\left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x, m \neq 0$$

**Demostración.** Sean  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  los extremos de una cuerda.

1. Sea  $P(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:

$$\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$$

2. Forma analítica de esta condición

$$x_1 + x_2 = 2x, y_1 + y_2 = 2y$$

3. Si  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2$

$$P_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E} \Rightarrow b^2(x_2)^2 + a^2(y_2)^2 = a^2b^2$$

Restando ambas ecuaciones se tiene

$$b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$$b^2(2x)(x_1 - x_2) + a^2(2y)(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{b^2(2x)}{a^2(2y)} = -\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = -m$$

$$\text{de donde obtenemos: } y = -\left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x, m \neq 0$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una recta que pasa por el origen (centro de la elipse) y, por tanto, es un *diámetro* de la elipse. ■

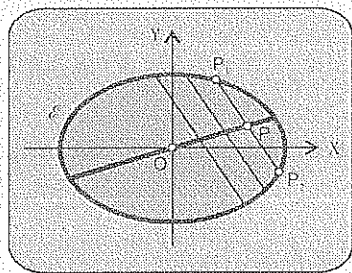


FIGURA 7.23

- 24** Establecer y demostrar un teorema para la circunferencia que sea análogo al teorema dado en el Ejercicio 23 para la elipse.

**Solución. Teorema:** El lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente  $m$  de la circunferencia  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2$  es:

$$y = -\frac{x}{m}, m \neq 0$$

La demostración queda a cargo del lector.

- 25** Demostrar que si un diámetro de una elipse biseca todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la elipse.



**Demostración.** Sea la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Por el Ejercicio 23, la ecuación de

un diámetro es,  $\mathcal{D}: y = -\left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x$

y de otro diámetro será,  $\ell: y = -\left(\frac{b^2}{a^2m_1}\right)x$

Como  $\ell$  es paralela a las cuerdas, de pendiente  $m$ ,

que biseca  $\mathcal{D}$ , entonces:  $m = -\frac{b^2}{a^2m_1}$

o sea que el diámetro conjugado de  $\ell$  se puede escribir de la forma  $\ell: y = mx$ , esto es,  $\ell$  biseca a las cuerdas paralelas a  $\mathcal{D}$ . Por tanto, si  $m$  y  $m_1$  designan las pendientes de dos diámetros, éstos son conjugados si se cumple

$$m \cdot m_1 = -b^2/a^2$$

**Nota.** Si la elipse es de la forma,  $\mathcal{E}: a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ , debe cumplirse que

$$m \cdot m_1 = -a^2/b^2$$

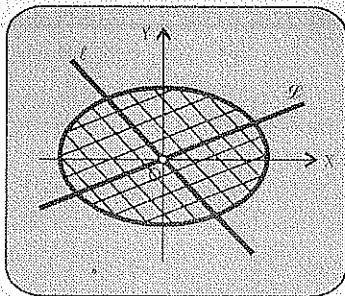


FIGURA 7.24

## EJERCICIOS DE REPASO

(Texto: F. J. De La Borbolla)

- 1** Hallar la ecuación de la elipse, con centro en  $(0, 0)$ , en la que el lado recto es visto bajo un ángulo de  $90^\circ$  desde el centro de la curva. Se sabe además que el eje menor está sobre el eje Y y mide 8 unidades.

**Solución.** Forma de la ecuación de la elipse,  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (1)

$$\text{Si } m(\angle \text{LOR}) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle \text{LOF}) = 45^\circ$$

$$\text{Esto es, } \overline{LF} = \overline{OF} \Rightarrow \frac{b^2}{a} = c \Leftrightarrow b^2 = ac \quad (2)$$

$$\text{Si } c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + ac - a^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{En (2): } b^2 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\text{Como } b = 4 \Rightarrow 16 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow 2 = 8(\sqrt{5} + 1)$$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{8(\sqrt{5} + 1)} + \frac{y^2}{16} = 1$$

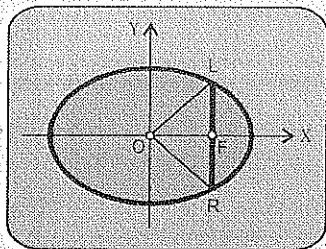


FIGURA 7.25

- 2** Hallar la ecuación de la elipse con centro en  $(0, 0)$ , eje focal en el eje Y, que pasa por  $P(1, 4)$  y la relación del LR a la semidistancia focal es  $\sqrt{2}$ .

**Solución.** La ecuación de la elipse es de la forma  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  (1)

$$\text{Si } P(1, 4) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{a^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 16} \quad (2)$$

$$\text{Como } \frac{LR}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2b^2}{ac} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}b^2 = a\sqrt{a^2 - b^2} \quad (3)$$

$$\text{Sustituyendo (2) en (3) se tiene: } \frac{\sqrt{2}a^2}{a^2 - 16} = a\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{a^2 - 16}}$$

de donde obtenemos la ecuación:  $a^4 - 33a^2 + 270 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 18 \vee a^2 = 15$

Sustituyendo estos valores en (2) resulta:  $b^2 = 9 \vee b^2 = -15$

La segunda solución para  $b^2$  es inadmisibles. Por lo que, en (1), la ecuación de la elipse buscada es:  $\mathcal{E}: 2x^2 + y^2 = 18$  ■

- 3** Una circunferencia variable es tangente a las circunferencias  $\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 4x = 0$  y  $\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$ . Qué lugar geométrico describe el centro de la circunferencia móvil?

**Solución.** Si  $\mathcal{C}_1: (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow C_1(2, 0)$  y  $r_1 = 2$

$$\mathcal{C}_2: (x-8)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow C_2(8, 0) \text{ y } r_2 = 10$$

1. Sea  $C(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:  $\overline{CP} = \overline{TC}$

$$\Rightarrow \overline{C_2P} - \overline{C_2C} = \overline{C_1C} - \overline{C_1T}$$

$$\Rightarrow r_2 - \overline{C_2C} = \overline{C_1C} - r_1$$

2. Forma analítica de esta expresión

$$10 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$$

$$\Rightarrow 12 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando términos, la ecuación se reduce a:

$$x + 7 = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

De donde obtenemos la ecuación del L. G.:  $3x^2 + 4y^2 - 30x - 33 = 0$  ■

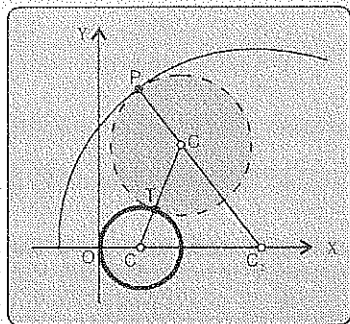


FIGURA 7.26

- 4** Una circunferencia de radio variable que pasa por  $P(0, 2)$  es tangente interior-

mente a la circunferencia  $\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 12y - 28 = 0$ . Hallar el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia variable.

**Solución.** Si  $\mathcal{C}_1: x^2 + (y - 6)^2 = 64 \Rightarrow C_1(0, 6)$  y  $r_1 = 8$

1. Sea  $C(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición:  $\overline{C_1T} = \overline{C_1C} + \overline{CT}$

$$\text{Como } \overline{CT} = \overline{CP} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1C} + \overline{CP}$$

2. La expresión analítica de esta condición es

$$8 - \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta

$$12 - y = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36}$$

de donde obtenemos la ecuación del L. G.:

$$4x^2 + 3y^2 - 24y = 0$$

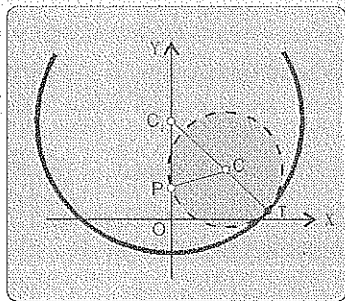


FIGURA 7.27

- 5** Calcular la longitud del eje mayor de una elipse que pasa por  $(0, 0)$  y cuyos focos son  $F_1(12, 5)$  y  $F_2(-8, 15)$ . Cuál es su ecuación?

**Solución.** Si  $P(x, y)$  es un punto genérico de la elipse, entonces por definición

$$\therefore |\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 12)^2 + (y - 5)^2} + \sqrt{(x + 8)^2 + (y - 15)^2} = 2a \quad (1)$$

Como la elipse pasa por  $(0, 0)$ , entonces

$$\sqrt{(0 - 12)^2 + (0 - 5)^2} + \sqrt{(0 + 8)^2 + (0 - 15)^2} = 2a \Rightarrow 2a = 30$$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene:

$$\sqrt{(x - 12)^2 + (y - 5)^2} = 30 - \sqrt{(x + 8)^2 + (y - 15)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando, la ecuación se reduce a

$$2x - y + 51 = 3\sqrt{x^2 + y^2 + 16x - 30y + 289}$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$$

- 6** Dados los focos  $F_1(2, 3)$ ,  $F_2(-2, 1)$  y la longitud del eje mayor = 8, obtener la ecuación y los elementos de la elipse.

**Solución.** Sea  $P(x, y)$  el punto genérico de la elipse. Por definición:

$$|\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$$

Elevando al cuadrado resulta:

$$2x + y + 14 = 4\sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5}$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse

$$\mathcal{E}: 12x^2 - 4xy + 15y^2 + 8x - 60y - 116 = 0$$

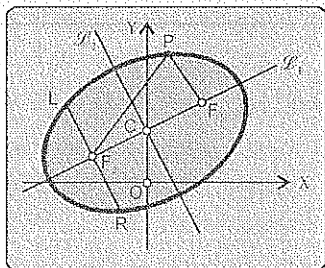


FIGURA 7.28

a) Centro de la elipse:  $C\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow C(0, 2)$

b) Ecuación del eje focal:  $y - 1 = \left(\frac{3-1}{2+2}\right)(x+2) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1: x - 2y + 4 = 0$

c) Ecuación del eje menor:  $y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow \mathcal{F}_2: 2x + y - 2 = 0$

d) Distancia focal:  $2c = |\overline{F_1F_2}| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$

e) Eje menor:  $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 5 = 11 \Rightarrow 2b = 2\sqrt{11}$

f) Longitud de cada lado recto:  $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{11}{2}$

g) Excentricidad:  $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/4$

**7** Qué ángulo debe formar la cuerda focal de una elipse, con el eje de ésta, para que su longitud sea igual a  $n$  veces la del lado recto?

**Solución.** Sea la elipse  $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , uno de cuyos focos es  $F(c, 0)$ .

Ecuación de la cuerda focal:  $y = m(x - c) \Rightarrow y = mx - cm$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene:

$$b^2x^2 + a^2(mx - cm)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2m^2cx + a^2m^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

La suma de las raíces de esta ecuación es

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2m^2c}{a^2m^2 + b^2}$$

Dado que:  $r_1 = \overline{P_1F} = a - ex_1$  y  $r_2 = \overline{P_2F} = a + ex_2$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = \overline{P_1P_2} = 2a - e(x_1 + x_2)$$

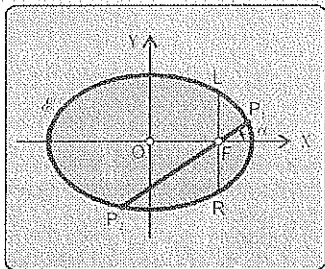


FIGURA 7.29

Luego, si  $\overline{P_1P_2} = n \overline{LR} \Rightarrow 2a - \frac{c}{a} \left( \frac{2a^2m^2c}{a^2m^2 + b^2} \right) = n \left( \frac{2b^2}{a} \right)$

de donde obtenemos:  $m = \text{Tg} \alpha = \sqrt{\frac{a^2 - nb^2}{a^2(n-1)}}$

- 8** Hallar el ángulo que debe formar la cuerda de la elipse  $x^2 + 3y^2 = 36$ , con el eje de ésta, de modo que la longitud de la cuerda focal sea igual al doble de su lado recto.

**Solución.** Si  $x^2 + 3y^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 36$  y  $b^2 = 12$ .  $\overline{P_1P_2} = 2\overline{LR} \Rightarrow n = 2$

Haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 7 se tiene :

$$\operatorname{Tg} \alpha = \sqrt{\frac{36 - 2(12)}{36(2 - 1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

- 9** Dados los focos de una elipse,  $F_1(-3, -2)$ ,  $F_2(9, 1)$  y la ecuación de una tangente,  $\mathcal{L}: 2x + 3y - 27 = 0$ , hallar la ecuación de la curva.

**Solución.** Por el Ejercicio 19 (Grupo 29) sabemos que:  $b^2 = d(F_1, \mathcal{L}) \cdot d(F_2, \mathcal{L})$

$$\text{Entonces : } b^2 = \left( \frac{|-6 - 27|}{\sqrt{4 + 9}} \right) \left( \frac{|18 + 3 - 27|}{\sqrt{4 + 9}} \right) = \frac{(39)(6)}{13} = 18$$

$$2c = |\overline{F_1F_2}| \Rightarrow 2c = \sqrt{(9+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{153} \Rightarrow c = \sqrt{153}/2$$

$$\text{Si } c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 153/4 = a^2 - 18 \Rightarrow a = 15/2$$

Sea  $P(x, y)$  el punto genérico de la elipse. Entonces, por definición

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-9)^2 + (y-1)^2} = 15 \\ \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 15 - \sqrt{(x-9)^2 + (y-1)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$5\sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 2y + 82} = 49 - 4x - y$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse:  $9x^2 - 8xy + 24y^2 - 58x + 48y - 351 = 0$

- 10** Dados los focos de una elipse  $F_1(8, 2)$ ,  $F_2(2, 2)$  y la ecuación de una tangente  $\mathcal{L}: x + 2y - 21 = 0$ , hallar la ecuación de la curva.

La solución del ejercicio queda a cargo de l lector : **Sol.**  $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{27} = 1$

- 11** Dos móviles  $M_1$  y  $M_2$  describen sendas circunferencias concéntricas de radios  $R$  y  $r$  respectivamente. La velocidad angular  $\omega$  en ambos es constante e igual, pero de sentido contrario. Qué lugar geométrico describe el punto medio del segmento  $\overline{M_1M_2}$ . (Aplicación, para  $R = 8$  y  $r = 2$ .)

**Solución.** Sean  $M_1(x_1, y_1)$  y  $M_2(x_2, y_2)$  los extremos del segmento  $\overline{M_1M_2}$ .

1. Sea  $M(x, y)$  un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición:  $\overline{M_1M} = \overline{MM_2}$
2. La expresión analítica de esta condición es

$$2x = x_1 + x_2, \quad 2y = y_1 + y_2 \quad (1)$$

Para el móvil  $M_1$ : 
$$\begin{cases} x_1 = R \cos \omega t \\ y_1 = R \sin \omega t \end{cases}$$

y para el móvil  $M_2$ : 
$$\begin{cases} x_2 = r \cos \omega t \\ y_2 = -r \sin \omega t \end{cases}$$

3. Luego, en (1):  $2x = (R+r) \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{x}{\left(\frac{R+r}{2}\right)}$   
 $2y = (R-r) \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \frac{y}{\left(\frac{R-r}{2}\right)}$

Sumando los cuadrados de ambas ecuaciones resulta:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = 1$$

Para  $R = 8$  y  $r = 2$ , obtenemos la elipse:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

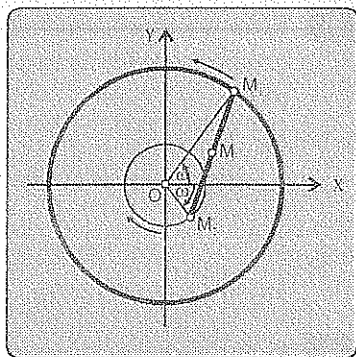


FIGURA 7.30

- 12** Dada la parábola  $\mathcal{P}: x_2 = 16y$ , hallar la ecuación de una elipse cuyo centro es el vértice de la parábola, el extremo del eje menor de la elipse sea el foco de la parábola y sabiendo que ambas curvas se cortan en ángulo recto, es decir, sus respectivas tangentes, en sus puntos de intersección, forman ángulos de  $90^\circ$ .

**Solución.** La ecuación de la elipse es de la forma

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Si  $x^2 = 16y \Rightarrow p = 4$ , luego, las coordenadas del foco son  $F(0, 4)$

Dado que  $p = \sqrt{F} = b \Rightarrow b = 4$

La pendiente de la tangente a la parábola en  $P_i$  es

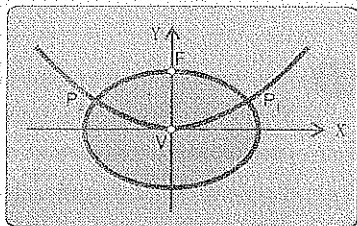


FIGURA 7.31

$$m = \frac{x_1}{2p} \Rightarrow m = \frac{x_1}{8}$$

y la pendiente de la tangente a la elipse en  $P_1$  es  $m_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

Como ambas curvas se cortan en ángulo recto

$$m \cdot m_1 = -1 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{8}\right) \left(-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{b^2 (x_1)^2}{8a^2 y_1} = 1 \quad (2)$$

Pero  $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x_1)^2 = 16 y_1$ ; luego en (2):  $\frac{b^2 (16 y_1)}{8a^2 y_1} = 1$

de donde:  $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 = 2(4)^2 = 32$

Finalmente, en (1), obtenemos la ecuación de la elipse,  $\mathcal{E}: x^2 + 2y^2 = 32$  ■

**13** Se da la elipse  $\mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 = 72$  y un segmento cuyos extremos son  $A(3, 6)$  y  $B(0, 8)$ . Cuál es el punto de la elipse que unido a  $\overline{AB}$  determina un triángulo cuya área es un valor extremo (Mínimo o máximo)

**Solución.** Si  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 18$  y  $b^2 = 8$

Las tangentes paralelas al segmento  $\overline{AB}$  determinan los puntos  $T_1$  y  $T_2$  que resuelven el problema.

Pendientes de las tangentes:

$$m = m_{AB} = \frac{8-6}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

Por el Teorema 7.5, las tangentes tienen por ecuación

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \pm \sqrt{18(4/9) + 8}$$

de donde:  $\mathcal{L}_1: 2x + 3y - 12 = 0$  y  $\mathcal{L}_2: 2x + 3y + 12 = 0$

Por lo tanto:  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{E} = T_1(3, 2)$  y  $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{E} = T_2(-3, 2)$

Las áreas mínima y máxima son respectivamente

$$a(\Delta ABT_1) = 6u^2 \text{ y } a(\Delta ABT_2) = 18u^2 \quad \blacksquare$$

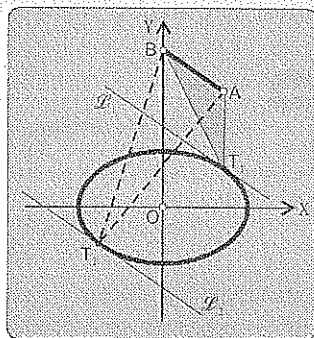


FIGURA 7.32

**14** Dada la elipse  $\mathcal{E}: 3x^2 + 4y^2 = 12$ , obtener la ecuación del diámetro que bisece a las cuerdas paralelas a la recta  $\ell: 4x + 3y + 2 = 0$ . Hallar también la ecuación del diámetro conjugado del anterior.

**Solución.** Si  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4$  y  $b^2 = 3$

$$\ell: 4x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow m = -4/3$$

Ecuación del diámetro  $\mathcal{D}: y = -\left(\frac{b^2}{a^2 m}\right)x$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4(-4/3)}x \Leftrightarrow \mathcal{D}: 9x - 16y = 0$$

Ecuación del diámetro conjugado,  $\mathcal{D}_\perp: y = mx \Leftrightarrow y = (-4/3)x$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_\perp: 4x + 3y = 0$$

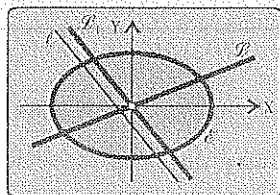


FIGURA 7.33

- 15** Verificar que las rectas  $\mathcal{D}: 2x - y = 0$  y  $\mathcal{D}_\perp: x + 3y = 0$ , son diámetros conjugados de la elipse  $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 4$

**Solución.** De  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}_\perp$  obtenemos:  $m = 2$  y  $m_\perp = -1/3 \Rightarrow m \cdot m_\perp = -2/3$

De la elipse:  $a^2 = 2$  y  $b^2 = 4/3 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$

Dado que  $m \cdot m_\perp = -\frac{b^2}{a^2}$ , entonces  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}_\perp$  son diámetros conjugados de la elipse  $\mathcal{E}$ .

- 16** Si  $P(4, 2)$  es extremo de un diámetro de la elipse  $\mathcal{E}: 3x^2 + 5y^2 = 68$ , obtener su ecuación y la del diámetro conjugado.

**Solución.** De la elipse se tiene:  $a^2 = 68/3$  y  $b^2 = 68/5$

Pendiente de  $\overline{OP}$ :  $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ecuación del diámetro  $\mathcal{D}: y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \mathcal{D}: x - 2y = 0$

Si  $m_\perp$  es la pendiente del diámetro conjugado  $\ell$ , se debe cumplir que:  $m \cdot m_\perp = -b^2/a^2$

$$\Rightarrow (1/2)m_\perp = (68/5)/(68/3) \Leftrightarrow m_\perp = -6/5$$

Por tanto, la ecuación del diámetro conjugado es

$$y = (-6/5)x \Leftrightarrow \ell: 6x + 5y = 0$$

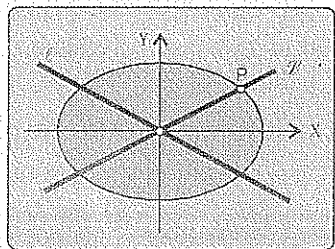


FIGURA 7.34